11.05.2010

-א-

# הרצאה מס' 9

את התרגיל הבא נפרסם עד שבועות, ותאריך ההגשה יהיה בערך שבועיים (או 3) אחרי הפרסום.

אנחנו עוברים עכשיו לדון **במכרזים קומבינטוריים**

השאלה הבסיסית שבאה אחרי "איך נותן את המוצר היחיד הזה?" היא - יש לנו הרבה מוצרים, איך נחלק אותם?
כמובן, שאם הדברים הם בלתי-תלויים, אפשר לחלק אותם אחד אחד.
אבל אנחנו מתעניינים במקרים שבהם יש תלות.
למשל: אני רוצה עגבניה, ואני רוצה מלפפון - אבל שניהם ביחד שווים לי יותר כי אז אני אכין סלט...

צריך להסתכל על השאלה הזו בשתי רמות שונות.
רמה אחת היא ברמת האלגוריתמית, וכיוון מכרז קומבינטורי הוא דבר טבעי להסתכל על זה.
רמה אחרת היא ברמת האסטרטגיה עצמה יותר.

(*) דוגמה לזה למשל, היא בשדות תעופה.
אי אפשר לעשות מכרז על שעת המראה בנפרד משעת נחיתה.
אם מוכרים אותם בנפרד יש לנו בעיית Exposure: יש לי חצי חבילה, ואין לי מה לעשות איתה ואני תקוע.
⇐ אין מה לעשות חוץ מלעשות מכרז קומבינטורי ולמכור יחד חבילות שלמות

(**) דוגמה נוספת היא מכרזי Spectrum.
במדינה יש כל מיני תדרי רדיו, וזה נהיה רלוונטי במיוחד כשנכנסו לעסק התדרים הסלולריים. אבל תדר בניו-יורק לבד זה לא מספיק, כי הלקוחות נוסעים ברחבי המדינה והחברה צריכה לתת כיסוי ללקוחות שלה בלי להחליף תדרים כל הזמן.
מה עשו? חילקו את המדינה לאזורים גיאוגרפיים ופרסמו איזה חלק של הספקטרום [illegible] בכל מקום.
⇐ כתוצאה מזה, המכרז של רשות התקשורת הפך להיות הסעיף השני המכניס ביותר בארה"ב אחרי רשות המסים..

בואו נפרמל מה אנחנו צריכים לעשות..

$m$ מוצרים לא ניתנים לחלוקה
$n$ מתמודדים שלכל אחד יש ערך לכל תת-קבוצה של מוצרים.
פונ' $V_i: 2^m \to \mathbb{R}$, שעבור תמורת מוצרים $S$, $v_i(S)$ תאמר לנו מה הערך של המתמודד $i$ עבור קבלת תמורה $S$.

בעיה: למצוא חלוקה $s_1,\ldots,s_n$ שממקסמת את התועלת החברתית $\sum v_i(s_i)$

נניח $v_i(\phi)=0$, $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \le v(T)$ (free disposal)
כלומר, אם יש משהו שאני לא רוצה אני יכול לזרוק אותו.
$V_i$ הינו פונ' רק של $S_i$ (no externalities) - כלומר, מעניין אותי מה אני מקבל ולא ממש אכפת לי מה האחרים מקבלים.

בעיה מס 1: הקלט כאן הוא בלתי נסבל. גודל הקלט הוא $n \cdot 2^m$.
לא ברור בכלל איך אפשר להתחיל לעבוד פה, ואיך שחקן יודיע לנו מה ה-$V_i$ שלו.

בעיה מס' 2: קשה חישובית. איך עושים מקסימיזציה לדבר הזה? [illegible] הבעיה שלנו מאוד שזה יהיה NP-Complete.

בעיה מס' 3: תמריצים/תשלומים

נדמה לנו שיש לנו פתרון רשמי - VCG.
אבל אנחנו לא יכולים להשתמש ב-VCG, כי בעיה 1 ו-2 לא יפתרו
בצורה הנדרשת כדי לאפשר שימוש ב-VCG.

תחילה נתרכז במקרה פרטי שבו בעיה 1 פתורה, ועוד נדון בבעיות 2 ו-3.
בשאר הקורס נדון די במקרי קצה מעניין.

**דוגמה:** Additive Valuation

נניח שלכל שחקן $i$, $v_i(S)=\sum_{j\in S} v_i(j)$

- פה אין בעיה של הקלט, זה הופך ל-m מימ׳.
- אין קושי חישובי כי אפשר לחלק כל מוצר בנפרד.
- אין בעיה של תמריצים/תשלומים - אפשר להשתמש ב-VCG

כמובן שזה טיפשי להסתכל על זה כעל מכרז קומבינטורי, ומראש היה צריך להסתכל על זה כעל m מכרזים נפרדים.

עכשיו יש סיבוך לבעיה הזאת.

במקרה שבו $V(\{a,b\})<V(a)+V(b)$ - b ו-a הם substitutes.
המקרה הקיצוני של מוצרים תחליפיים הוא $v(S)=\max_{j\in S} v(j)$ unit demand
זה מדויק Maximum Weighted Bi-Partite Matching.
ושוב - את זה אנחנו יודעים לפתור - אם כולם unit-demand מריצים אלגוריתם ל-Maximum Weight Bi-Partite Matching ומריצים על זה VCG.

במקרה שבו $V(\{a,b\})>V(a)+V(b)$ complements
דברים ששווים לנו יותר אם אנחנו מקבלים את כל החבילה.
מקרה קיצוני: המגפיים ונעליים, נעל שמאל ונעל ימין: שווים 0 לבד, ויש להם ערך ממשי ביחד.

$$V(S)=\begin{cases} V^* & \text{if } S\supseteq S^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \Leftarrow \text{single minded bid}$$

באופן כללי, המצב של מוצרים משלימים הרבה יותר מסובך ממוצרים תחליפיים.
אנחנו נראה שבמקרה של מוצרים תחליפיים יהיה לנו פתרון טוב.

אנחנו עכשיו נדון במקרה שבו ידוע שכל המתמודדים הם Single Minded Bidders.

**הקלט:** שלנו פה הוא מאוד פשוט: $(v_1^*,S_1^*),\dots,(v_n^*,S_n^*)$
כאשר $v_i^*$ הוא פשוט מספר, ו-$S_i^*$ הוא וקטור [illegible] של המוצרים
שאני רוצה.
ההשמה היא: $v_i(S)=\begin{cases} v_i^* & S\supseteq S_i^* \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

**פלט:** ברור שכל שחקן שניתן לו משהו - ניתן לו את כל הקבוצה שהוא רוצה.
למצוא קבוצה W של זוכים שממקסמת את $\sum_{i\in W} v_i^*$
תחת האילוץ ש: $i,i'\in W \Rightarrow S_i^*\cap S_{i'}^*=\emptyset$.

**משפט:** הבעיה הינה NP-קשה

**הוכחה:** רדוקציה מבעיית ה-Independent Set.
נראה שאפשר להפוך קלט של IS לקלט של הבעיה שלנו, ואז אם אפשר לפתור אותה אז אפשר לפתור את IS - וסיימנו.
תיאור הבעיה של IS: צריך למצוא בגרף קבוצת קודקודים ללא קשתות מקסימלית (היא שקולה לבעיית הקליקה ולכן NP-C)

המוצרים הולכים להיות הצלעות, השחקנים הם הקודקודים. קודקוד $i$ רוצה את קבוצת הצלעות להן הוא נוגע.
$S_i^*=\{(i,j)\in E\}$

11.05.2010



למה יש לנו הקבלה?
- קבוצה בלתי תלויה R, הרדוקציה נותנת לנו סטים זרים
רלוונטית ⇐ סטים זרים של מוצרים.

• אם נבחר $v_i^*=1$ ; יש לנו רדוקציה לבעיית ה- Independent Set.

ובכאלה סיימנו את הרדוקציה.
בקורס באלגו היינו עוצרים פה, אך מתעסקים באלגוריתמי קירוב:
אם במציאות חייבים לעשות משהו.

כמה קשה לקרב את בעיית הקליקה?
זה לא רק NP-Hard לפתור את בעיית הקליקה, לפי משפט של Hastad זה NP-H
גם לקרב את גודל הקליקה המקסימלית עד כדי $n^{1-\epsilon}$ לכל $\epsilon>0$, כאשר
n זה מספר הקודקודים.
⇐ גם אצלנו אי אפשר לקרב, כי הרדוקציה שלנו משמרת קירובים (התוצאה של IS היא בדיוק התוצאה שמתקבלת אצלנו)
אם אנחנו רוצים לבטא את הקירוב במונחים של מספר המוצרים, אז אי אפשר לקרב עד כדי $m^{\frac{1}{2}-\epsilon}$.

<u>משפט</u>: יש קירוב פולינומיאלי עד כדי $\sqrt{m}$
ולא רק, הקירוב שהוא Incentive Compatible.

נשאלת השאלה: יש בידינו אלגוריתם <u>שמקרב</u> את הרווחה החברתית. האם אפשר להשתמש בו עם VCG בשביל IC?
התשובה היא שלא. ההוכחה של VCG מסתמכת על זה שאנחנו <u>משיגים</u> את הרווחה החברתית המקסימלית.

<u>שאלה מהקהל</u>: למה שזה בכלל יעניין אותנו פקטור קירוב של $\sqrt{m}$? זה יחסית גרוע בתור קירוב.

האלגוריתם שנדון בו עכשיו נראה הגיוני. גישה אחת אומרת - לפי התיאוריה אין מה לעשות ואפשר להמשיך הלאה. נראה שמספר האלגוריתם רק טוב ונזנח את התיאוריה.
גישה נוספת אומרת אנחנו נעשה את הניתוח התיאורטי יותר (ונמצא הכי כן) שעבור תמונות חיוביות מאפיינים ראשונים של המצב. מתוך זה נוכל להסיק תמונות על המציאות.

<u>אז מה האלגוריתם?</u>
• נמיין לפי סדר יורד $\frac{v_2^*}{|S_2|}\le\frac{v_1^*}{|S_1|}$ ...

זה לא עובד, כי אם $|S_1|=1$ והוא תופס את האפשרות למכור יותר, למישהו אחר.
אם נמיין לפי $v_i$ באותו לא יעבוד כי אז הערך הכי גבוה תופס את כל הסטים ולכל האחרים יש סיכוי נמוך לקבל מוצרים בכלל.

מסתבר שמה שעובד טוב זה:
• נמיין לפי סדר יורד של $\dots\le\frac{v_2^*}{\sqrt{|S_2|}}\le\frac{v_1^*}{\sqrt{|S_1|}}$
• $W\leftarrow\emptyset$
• לכל $i=1\dots n$
אם $S_i^*\cap\left(\bigcup_{j\in W}S_j^*\right)=\emptyset$ אז $W\leftarrow W\cup\{i\}$

איך נקבע כמה?
• שכר התשלום הולך להיות הערך $v_i$ המינימלי שדרוש היה כדי לנצח.
בואו נראה מה זה במונחים של השאלה שלנו..
הנוסחה היא: $P_i = v_j^*\cdot\frac{\sqrt{|S_i^*|}}{\sqrt{|S_j^*|}}$
כאשר j היינו הראשון ש- $S_j^*\cap S_i^*\neq\emptyset$ אבל $S_j^*\cap S_k^*=\emptyset$ לכל $j<k<i$.

עכשיו אנחנו צריכים להראות שזה קירוב כדי $\sqrt{m}$ ושזה Incentive Compatible.

נתחיל מהו Incentive Compatability.

<u>הוכחה:</u> מתקיימים שני התנאים הבאים:

① האלגוריתם מונוטוני $v_i' \geq v_i$ , $s_i' \subseteq s_i$ ⟸ אם $(v_i,s_i)$ מנצח ⟸ $(v_i',s_i')$ מנצח.

② התשלום הוא הערך הקריטי: המינימום הדרוש לנצחון

⟸ תנאים אלה גוררים כנות

כל שלושת האלגוריתמים שהצגנו לדרך היו מונוטוניים.

נוכיח את זה בשיעור הבא...