25/5/10

נושאים חישוביים בתורת המשחקים

קצת חזרה על השיעור הקודם: ראינו אלגוריתם חמדן שנותן קירוב של $\sqrt{m}$ לבעיית המכרז הקומבינטורי (m מוצרים, n שחקנים) (single minded case)

קלט: $(v_1,S_1),\dots,(v_n,S_n)$

אלגוריתם:
- Sort bids by decreasing $v_i/\sqrt{|S_i|}$
- $W \leftarrow \emptyset$
- for $i=1,\dots,n$ do:
  - if $S_i \cap (\bigcup_{j\in W} S_j) = \emptyset$:
    $W \leftarrow W \cup \{i\}$
- Each $i \in W$ get S_i and pays its critical value

תזכורת:
* Single minded
אומר שהשחקן מעוני"ן בקבוצה מסוימת של מוצרים בלבד -

$$v_i(S) = \begin{cases} v_i & S_i \subseteq S \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

הגדרות:
- מכרז יקרא מונוטוני אם לכל $v_i' \ge v_i$, $S_i' \subseteq S_i$: (v_i,S_i) זוכה $\Rightarrow$ (v_i',S_i') זוכה

למשל: הגדלת ההצעה או הקטנת הקבוצה רק משפרות את הסיכוי לזכות.

- למכרז יש תשלום קריטי אם התשלום הוא

$$p_i = \inf\{v \mid (v,S_i) \text{ wins}\}$$

משפט: האלגוריתם הנ"ל מקיים -
1. קירוב $\sqrt{m}$ לרווחה האופטימלית
2. כנה (עבור Single minded bidders)

הוכחת סעיף 2 - ההוכחה נובעת מהלמה הבאה: ראשית נראה שהמנגנון מקיים את התכונות הדרושות לעיל, ושתכונות אלה גוררות כנות.

25/2/10

כך לאור שהמנגנון מונוטוני בגלל האופן שבו ממיין את ההצעות - מונוטוני
עולה עם v_i ויורד עם z_i ולכן הוא מקיים את התכונה הראשונה.
יש פתרון אין שינוי שכתוב בשלב קודם (רק לפי ה-v_i, $\frac{v_i}{z_i}$ וכו')
שמקיימות תכונה זו, ובעצם כל מנגנון חמדני שיהיה למחיר יהיה ח"מ
לקיים כלל.

את התכונה השנייה מקיימת באופן ברור - הגדרנו את פונקציית התשלום של
המנגנון להיות בדיוק הערך המינימלי שבו שחקן זוכה כפי שהגדרנו למעלה.

נראה שהתכונות אלו אכן נכונות: נסמן את הערכים האמיתיים ב- z_i, v_i ונשאל
האם כדאי לשקר ולומר z_i', v_i'?
כפי שהוזכר שווה לשקר, הכוונה לומר $z_i \geq z_i'$, אחרת לא נקבל את הקבוצה
שרצינו כלל (single minded bidders) ולכן נפסיד.
נסתכל על השקר (z_i, v_i') - אשקר רק במחיר ולא בקבוצה. זה רק
יותר טוב מלומר (z_i', v_i'): (1) אם ניצחנו קודם, בטח נקבל עכשיו
(בגלל מונוטוניות ב-z). (2) התשלום יכול רק לקטון.

כעת נשווה ל- (z_i, v_i) - ברור ש- (z_i, v_i') זוכה, אחרת לא נשקר.
(1) אם גם (z_i, v_i) זוכה $\Rightarrow$ התשלום יהיה זהה ולכן הרווח
יהיה באותה מידה.
(2) אם (z_i, v_i) מפסיד $\Rightarrow$ אז התשלום $\geq v_i$ $\Rightarrow$ התועלת
שלי, אם אזכה ב-(z_i, v_i'), לא חיובית, ולכן השקר אינו משתלם.
(זה אם מגיע שוויון והתשלום שווה ממש v_i אז התועלת מתאפסת
שזה בדיוק כמו להפסיד).
$\Rightarrow$ בשום מקרה לא משתלם לשקר ולכן המנגנון אמת.

25/12/08

3

נזכיר את סעיף 1 - נרצה להראות ש-

$$\sum_{i\in W} v_i \geq \frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\sum_{i\in OPT} v_i$$

עבור כל קבוצות שונות ב-OPT שמקיימות את האילוץ ← [illegible]

$$i,j\in OPT \Rightarrow S_i\cap S_j=\emptyset$$

אנחנו נחלק כל הוצאה של W ו-OPT: נסמן $i\sim j$ עבור $j\in OPT$ ו-$i\in W$ אם: ① $S_j\cap S_i\neq\emptyset$

② $$\frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}} \geq \frac{v_j}{\sqrt{|S_j|}}$$

כלומר, j לא נכנס ל-W בגלל i. (יש לב שיכול להיות יותר מ-i אחד כזה ל-j לא להכנס) אנחנו נרצה להראות ש- $\sum_{\substack{j\sim i\\ j\in OPT}} v_j \leq v_i\cdot\sqrt{m}$ (סכום הערכים של השחקנים שלא נכנסו בגלל i קטן מהערך של i כפול $\sqrt{m}$).

* אנחנו סופרים את השחקנים שנכנסו גם כאן וגם ב-OPT כי הם בטוח מקיימים את התנאי.
* אם יש j שלא נכנס גם בגלל i וגם בגלל i' אנחנו נספור אותו עבור שניהם - זה יותר חזק ממה שאנחנו רוצים להראות.

לכל $j\in OPT$: $v_j \leq \frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}}\cdot\sqrt{|S_j|} \Rightarrow \sum v_j \leq \frac{v_i}{\sqrt{|S_i|}}\cdot\boxed{\sum\sqrt{|S_j|}}$

(עבור $i\sim j$)

$$\sum\sqrt{|S_j|} = (1,\dots,1)\cdot(\sqrt{|S_1|},\sqrt{|S_2|},\dots,\sqrt{|S_t|}) \leq$$ ← א' שוויון קושי שוורץ

$$\leq \underbrace{\sqrt{|S_i|}}\cdot\underbrace{\sqrt{|S_1|+\dots+|S_t|}} \leq \sqrt{|S_i|}\cdot\sqrt{m}$$

יש לכל היותר $|S_i|$ j-ים ש-i מפריע להם כי כל מוצר של i יכול להפריע רק לאחד (כי הם זרים).

הסכום הוא כל המוצרים שלנו. יש m מוצרים לכן סך הסכום שלהם לא יותר מ-m.

$$\Rightarrow \sum v_j \leq v_i\cdot\sqrt{m}$$

כפי שרצינו להראות.

25/12/10

בעצם הכל היה לגבי כל שחקן שהוא single minded. עכשיו נרצה
לראות איך פותרים את זה ואיזה מכרזים אבל ראשית נגדיר מה בכלל
אנחנו את המקרה הכללי - כל אחד יכול להגיש כמה אפשרויות של
הצעות.

לכל שחקן יש פונקציה $v_i: 2^{[m]} \to \mathbb{R}^+$ שמתארת את הערך שלו לכל
תת קבוצה של מוצרים.

איזה דרכים אפשריות יש להציג את זה? ① לשאול שאלה מלאה שמתארת
את כל הפונקציה ולהציג את הטבלה (אפשרי, לפי הגדרה (?) ☺)
זה מאוד חסכוני את התקשורת להעברת הנתונים, אבל איך מחשבים את
זה? ... לשאול שאלה לגבי כל אפשרות עבור כל שחקן בכל מקרה.
② להגדיר שפה - bidding language - שמאפשרת תיאור של הפונקציה
בצורה קצרה ויעילה לכן צריך שמאפשר לשחקנים להשתמש בו בצורה
זו ... מה שאנחנו רוצים לעשות.
③ להגדיר אינטראקציה בין מוכר לשחקן עבור כל שחקן (תלוי בין שחקנים
וכו') - זה שקול מבחינת אלגוריתם ואין צורך ... לזה כעיקר הכל.

האלגוריתם שהגדרנו לשחקן יחיד היה (v_i, S_i) (שחקנים עם single
minded bidders), כך ש- $v(S) = \begin{cases} v_i & S \supseteq S_i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. את האלגוריתם הזה נוכל
להרחיב ל- (v_1,S_1) or (v_2,S_2) ... or (v_k,S_k) אבל אז יש בעיה של פרשנות:
האם אפשר לקבל יותר מאחת מתוך הקבוצות המפורטות או שמדובר באחת
רק מהאפשרויות? למשל $(8,\{a,b\})$ OR $(7,\{a\})$ אז $v(\{a,b\})=?$
האם יכול להיות 8 או 15 ... לשפה הראשונה, ההצעות הן
XOR (כל אחת מהן הפונקציה מוגדרת כ- exclusive or) ולשנייה
קוראים פשוט OR.

25/5/10

כלומר, עבור $(V_1,S_1)XOR \dots XOR(V_k,S_k)$ אז $V(S) = \max_{i: S_i \subseteq S} V_i$

זה יכול לשמש ל unit demand - אף אחד מהם, אנחנו רוצים רק אחד
מהם. נניח ל סוחר הוא ... שלא ... שעבור ...
... שאפשר ... את כל אחד הקבוצות ... רק אחד
... . הוא שווה במקרה של $V(S)=|S|$ ...
את כל האפשרויות של כל אחד הקבוצות (כל קבוצה בגודל 1 שווה 1,
בגודל 2 שווה 2 וכן הלאה...).

(בניגוד לשפה של OR שם עבור $(V_1,S_1) OR \dots OR(V_k,S_k)$ - אם
כל הקבוצות ... אז המחיר הכולל הוא סכום הערכים של הקבוצות!
אם הקבוצות הן זרות, זה ... כי אז $V(S) = \sum_{S_i \subseteq S} V_i$
אבל מה קורה אם הן לא זרות? למשל $(\{a,b\},7)$ OR $(\{a,c\},8)$ OR $(7,\{a,b\})$
$V(\{a,b,c\}) = ?$

* נניח שהערכה ... $V(\{a,b,c\}) = 8$ כי a יכול להיות
רק ל-b או c ולכן ההערכה ... של $\{a,c\}$.

הגדרה: תהיינה u ו-v הערכות, אז:
$(V \; OR \; U)(S) = \max V(S_1)+U(S_2)$
$S_1 \cup S_2 = S$ ← איחוד זר.

$(V \; XOR \; U)(S) = \max(U(S), V(S))$

השפה של OR היא לא שלמה, למשל אם אנחנו רוצים את a או את b
אז $(a,10)$ OR $(b,10)$ OR $(\{a,b\},10)$ אבל לפי ההגדרה, נקבל
$V(\{a,b\}) = 20$ ... שהערכה היא לא ...
...

25/5/08

אם אנחנו רוצים לפתור את single minded אבל לפתור את הבעיה עם OR
המייצגת לה הבעיה ב-OR בשפה שונה אך כלל בדיוק כמו ב-
single minded.

כמו שהראנו על ה-XOR: נראה שאפשר להפוך XOR ל-OR -
ע"י הוספת איבר דמה לכל הצעה אנחנו מונעים את האפשרות שיותר יזכה
לכן ע-8 הופכת את ההצעה של XOR ל-OR והוספת הפריטים
הדמיוניים מאפשר לנו לפתור את זה עם ה-single minded.

סיכום, הראנו להפך את כל הקלט לא לפגוע את הזמן של המכרז.