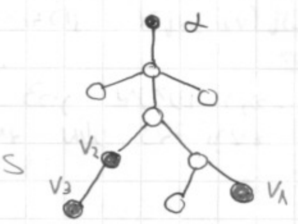
04.05.2010

-1-

הרצאה מס' 8

בשבוע שעבר הצגנו את המנגנון של שפלי Shapley, ואת ערך שפלי.



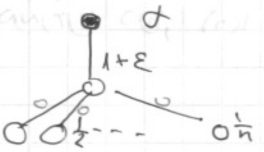
כל קשת מתחלקת שווה בשווה בין כל הצרכנים שמשתמשים בה.

אבל שפלי לא ממקסם רווחה חברתית.

דיברנו על אלגוריתם Moulin + Shenker:

* $S \leftarrow N$
* כל עוד קיים i כך ש- $v_i < p_i(S)$ — $S \leftarrow S \setminus \{i\}$
* התחבר את S.

בואו נסתכל על דוגמה של רשת:



$p_i = \frac{1+\varepsilon}{n}$

אבל פה האחרון לא מרוצה, אז הוא יורד מהפרק.

$\Leftarrow$ $p_i = \frac{1+\varepsilon}{n-1}$ $\Leftarrow$ ה- $n-1$ לא מרוצה $\Leftarrow$ $p_i = \frac{1-\varepsilon}{n-2}$ ...

$\Leftarrow$ $p_i = 1+\varepsilon$ והראשון לא מרוצה

$\Leftarrow$ אף אחד לא זוכה בכלום.

כמובן, שאם היינו משפרים את כולם, העלות החברתית הייתה $1+\varepsilon$ והתועלת $\sim \log n$.

$\Leftarrow$ הרווחה החברתית הייתה $\sim \log n - 1$.

מוצרים דיגיטליים

n שחקנים, $v_1 \geq \dots \geq v_n$

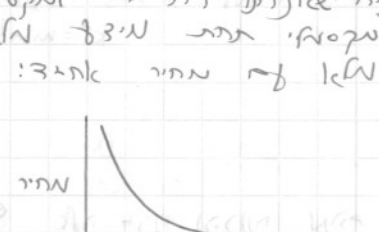
n מוצרים

ברור שאם נרצה למקסם רווחה חברתית, ניתן מוצר לכל שחקן.

אבל נניח שאנחנו רוצים למקסם רווח מהמכירה.

הרווח המקסימלי תחת מידע מלא והפליית מחירים $T = \sum_{i=1}^{n} v_i$

במידע מלא עם מחיר אחיד:



אז המקסימום שאפשר לעשות במחיר אחיד זה:

$F = \max_k k \cdot v_k$ (הכנסה אופטימלית במחיר אחיד)

$F \geq i v_i$ לכל i

$$T = \sum_i v_i \leq \sum_i \frac{F}{i} = F \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = F \ln n$$

$$opt(v) = \arg\max_p p \cdot (\#\text{bidders s.t } v_i \geq p)$$

אנחנו רוצים לדבר על מנגנונים כנים.

הערה: נסמן ב- $F^{(2)}$ את ההכנסה האופטימלית במחיר אחיד שמוכר לפחות לשני שחקנים.

איך נראה מנגנון כזה? מציעים לשחקן i מחיר שתלוי רק בערכים של השחקנים האחרים בצורת take it or leave it

<u>מנגנון:</u> נציע לכל שחקן את המחיר $opt(b_{-i})$ (כלומר, ה- opt לפי ההצעות של השחקנים האחרים)

<u>דוגמה:</u> 10 אנשים עם $b_i = 10$

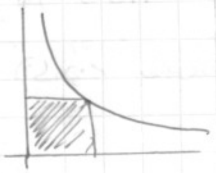
90 אנשים עם $b_i = 1$

<u>מחיר לאנשים שהציעו 1:</u> 89 אנשים $b_i = 1$, 10 אנשים $b_i = 10$ — $opt(b_{-1}) = 10$

<u>מחיר לאנשים שהציעו 10:</u> 9 אנשים עם $b_i = 10$, 90 אנשים שהציעו $b_i = 1$ — $opt(b_{-10}) = 1$

המוכר מרוויח בסוף 10 במקום 100 :(

נעם מסביר את המנגנון הבא...
נניח שיש לנו מונופוליסט ויש לו גרף ביקוש.
כמובן שאם הוא היה יכול להפלות מחירים, הוא היה יכול לקבל את כל השטח מתחת לגרף.
אבל יש הרבה מקרים שבהם הוא לא יכול לדעת מי עומד מולו ולכן הוא צריך לקבוע מחיר אחיד.
אבל כדי שיוכל להרוויח ככל הניתן, הוא צריך מנגנון כזה.



⇐ אסור לנו להשתמש בערכו של השחקן שעומד מולנו כדי לקבוע את המחיר שלו.

כשאנו מסתכלים על המנגנון הנ"ל, אנחנו צריכים לחשוב על הדוגמה והמוטיבציה הנ"ל.

המנגנון הנ"ל שכתבנו במקודם מונח, לא מאפשר לנו להגיע לקירוב שאנחנו רוצים.

<u>משפט</u>: שום מנגנון דטרמיניסטי (סימטרי) כזה לא נותן לנו קירוב של קבוע ל-$F^{(2)}$.

⇐ אנחנו משווים את עצמנו ל-$F^{(2)}$ כי ברור שההשוואה למקרה פתולוגי שבו מותר לנו למכור רק לקונה אחד והוא לחלוטין בלתי-ישיג במנגנון כזה, היא מיותרת.

<u>הוכחה</u>: $b_i = \{1, h\}$

ההצעה שלנו: $t_i(n_h(b_{-i}), n_1(b_{-i}))$

אבל מכיוון שזה סימטרי, אין צורך להתחשב ב-i והמחיר ניתן לסימון ע"י $t(n_h, n_1)$

① $t(0, m) = 1$
② $t(m, 0) = h$

$t(k, m-k)$: אנחנו יודעים מ-① שאם $k=0$ המחיר הוא 1
ומ-② שאם $m=k$ המחיר הוא h.
⇐ חייבת להיות נקודה שבה אנחנו עוברים למחיר הגבוה.
נסמן ב- $k^* = \min\{k \mid t(k, m-k) = h\}$
השוק: $m+1$ שחקנים
k^* שחקנים $b_i = h$
$m+1-k^*$ שחקנים $b_i = 1$

מחיר לשחקנים שאמרו h: $t(k^*-1, m+1-k^*) = 1$ ⇐ אלה זוכים והרווח מהם הוא k^*.
מחיר לשחקנים שאמרו 1: $t(k^*, m-k^*) = h$ ⇐ אלה לא קונים בכלל, והרווח מהם 0.

האופטימלי עם מחיר אחיד h נותן הכנסה של k^*h ולכן קיבלנו את הפקטור h הנ"ל.
⇐ מנגנון דטרמיניסטי סימטרי לא יכול לתת לנו קירוב של קבוע.

(CS) Cost-Share Mechanism

<u>המטרה שלנו</u>: להוציא הכנסה R מהשוק.
נפעיל את אלגוריתם M+S כך ש- $p_i(S) = \frac{R}{|S|}$
<u>תזכורת</u>: מנגנון CS הוא כנה.
מנגנון זה יכול לקבל את ההכנסה $R \le F(b)$
$F(b)$ ← הכנסה אופטימלית מהשוק b.

איך זה מסתדר עם המשפט הקודם? ברור שיש פה איזשהו catch.

אבל אנחנו משתמשים ב-$F(b)$! הוא תלוי בקלט.

<u>מנגנון 2</u>
① חלק את השחקנים לשתי קבוצות b', b'' בצורה אקראית
② חשב את $F(b'), F(b'')$
③ הרץ את CS על b' עם $F(b'')$ ועל b'' עם $F(b')$.

04.05.2010
-3-

<u>טענה:</u> המנגנון הנ"ל הוא כנה.
<u>טענה:</u> המנגנון הנ"ל נותן קירוב 4 ל-$F^{(2)}$.

נסמן $F(b')=F'$, $F(b'')=F''$.

$p=opt(b)$ מחיר אחיד אופטימלי בשוק כולו

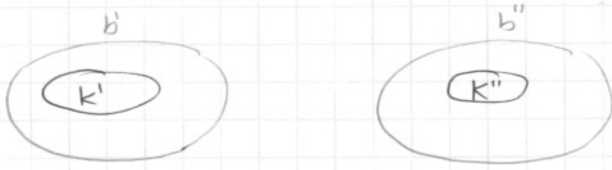
<u>מקרה א':</u> $F'=F''$ ⇐ הרווח הוא $F(b)$ $\begin{cases} \text{ההכנסה בשוק } b' \text{ עם מחיר } p \; + \\ \text{ההכנסה בשוק } b'' \text{ עם מחיר } p \end{cases} \le F'+F''$

כלומר $F(b)\le F'+F''$

<u>מקרה ב':</u> $F'\neq F''$

ההכנסה תהיה $\min(F',F'')$

נסמן ב- k את מספר הקונים <u>הזוכים</u> בשוק כולו בפתרון האופטימלי. $(v_i\geq p)$



$k=k'+k''$ מחולקים אקראית בין b' ל-b''.

נשים לב ש- $k'\cdot p\le F'$ (כי לכל k' הקונים האלו $p\le v_i$)
$k''\cdot p\le F''$

$$\frac{E[\min(k'p,k''p)]}{kp}=\frac{E[\min(k',k'')]}{k}\overset{(*)}{\geq}\frac{k/4}{k}=\frac{1}{4}$$

<u>טענה:</u> בהטלה של $k\geq 2$ מטבעות הוגנים
$E[\min(\#H,\#T)]\geq\frac{k}{4}$

אם הטענה נכונה, אז גם (*) נכון.

<u>נוכיח את הטענה:</u>

יהי M_i משתנה אקראי עבור $\min(H,T)$ לאחר i הטלות.
$E[M_k]\geq ?$

משתנה אקראי מינימום-התחלה $X_i=M_i-M_{i-1}$

$$E[M_k]=\sum_{i=1}^{k}E[X_i]$$

נביט ב- $E[X_i]$:

<u>אם i זוגי:</u> $(i-1)$ אי זוגי ולכן בה"כ $\#H<\#T$

$E[X_i]=\frac{1}{2}$ $\begin{cases} \text{בהסתברות } \frac12 \text{ יצא } H \text{ והמינימום עלה ב-1.} \\ \text{בהסתברות } \frac12 \text{ יצא } T \text{ והמינימום לא השתנה} \end{cases}$

<u>אם i אי זוגי:</u> אנחנו רק יכולים לומר ש- $E[X_i]\geq 0$.

<u>במקרה הפרט שבו $i=3$:</u>

$E[X_3]=E[M_3-M_2]=E[M_3]-E[M_2]=\frac{1}{4}$

$E[M_1]=0$ $E[M_2]=\frac{1}{2}$ $E[M_3]=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}$

$$E[M_k]=\sum_{i=1}^{k}E[X_i]\geq \underset{E[X_1]}{0}+\frac{1}{2}+\underbrace{\tfrac{1}{4}}_{E[X_3]}+\frac{1}{2}+\underbrace{0}+\dots+\frac{1}{2}+\underbrace{0}\geq\frac{1}{4}+\frac{\lfloor k/2\rfloor}{2}\geq\frac{k}{4}$$