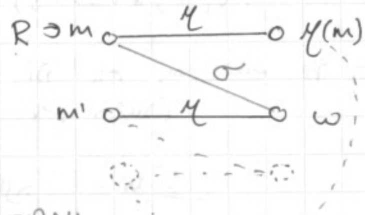
28.03.2010
-1-

<u>הרצאה מס' 5</u>

רגע לפני – לו"ז התרגיל: אפשר להגיש עד יום שלישי הבא 30/03
בתא של <u>יונתן אוניקס</u> בבניין ס (ליד הדוכן של משה)

תיארנו בשיעור שעבר אלגוריתם שמוציא שידוך יציב. אנחנו צריכים להוכיח עכשיו שהאלגוריתם הזה כנה עבור המציעים.
[כבר תיארנו שהוא לא כנה עבור הנשים.]

משפט: אלג' הצעות המציעים הוא כן עבור המציעים.
הוכחה: $\Pi = (>_{m_1}, >_{m_2}, \dots, >_{m_n})$ ההעדפות של המציעים.
מתקבל μ, שידוך יציב.
נניח ש- $\Pi' = (>'_{m_1}, >_{m_2}, \dots, >_{m_n})$ נותן שידוך σ.
הנחת השלילה: $\sigma(m_1) >_{m_1} \mu(m_1)$
נגדיר $R = \{m_i \mid \sigma(m_i) >_{m_i} \mu(m_i)\}$
אם $m \in R$, $w = \sigma(m)$ נרצה לטעון $m' = \mu(w) \in R$

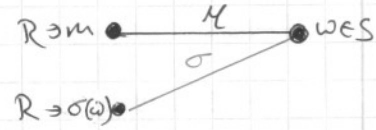


$w >_m \mu(m)$
$\Downarrow$ יציבות μ
$m' >_w m$
$\Downarrow$ יציבות σ
$\sigma(m') >_{m'} w$

ומשום כך היינו יכולים להגיע למעגלים פשוטים שבהם לסירוגין צלע מ-μ וצלע מ-σ.

$S = \{w_i \mid \sigma(w_i) \in R\} = \{w_i \mid \mu(w_i) \in R\}$. עבור $w \in S$, $\mu(w) >_w \sigma(w)$ כי אחרת
$\sigma(w), w$ היה זוג חוסם ל-μ והוא לא היה יציב.
נביט בריצת האלג' על Π, שמחזיר את μ
כל אישה ב-S דחתה את $\sigma(w)$ בשלב כלשהו באיטרציה (כי $\sigma(w)$ מעדיף את w,
ולכן הציע לה לפני שהציע לשידוך שלו ב-μ ואילו w דחתה אותו לטובת $\mu(w)$).

נביט על המציע <u>האחרון</u> שהציע הצעה ל-w כלשהי, $m \in R$.
w דחתה את $\sigma(w)$ באיטרציה <u>קודמת</u> (אחרת, זה סותר
את היותו של m המציע <u>האחרון</u> שמציע הצעה. ~~...~~ ואז להציע
בסיבוב הבא...)



אז באיטרציה הזו w דחתה מישהו $m' \notin R$ כאשר $m' >_w \sigma(w)$

כעת נרצה להראות ש-w, m' הוא זוג חוסם ל-σ:
m' לא ב-R ולכן $\mu(m') \geq_{m'} \sigma(m')$
$w >_{m'} \mu(m')$ כי <u>אחרי</u> ש-m' נדחה ע"י w הוא עבר ל-$\mu(m')$.

מכאן $w >_{m'} \sigma(m')$ $\Leftarrow$ (w, m') זוג חוסם ל-σ $\Leftarrow$ σ לא יציב
▯

<u>נשים ♥</u>: האם ההוכחה הזו תופסת מול קואליציה?
מי אומרת שזה תרגיל נחמד.
הטיעון שבו אנחנו משתמשים הוא בזה ש-m_1 הוא האחרון הוא שזה ש-$m' \notin R$ ולכן $m_1 \neq m'$.
האם אפשר להתאים את זה לקבוצה של מציעים שמשקרים?

נרצה לכמת את מידת ההעדפה. A – סט ההעדפות. ובמקום להסתפק עם $\succ_i \in L$ סדר
העדפות, נסתכל על $v_i \in \mathbb{R}^A$ – <u>במספר</u> – כמה אני מעדיף כל אופציה ב-A.
ואז נוכל להגדיר שהמטרה שלנו היא למקסם את $\sum v_i$, ואז להסתכל ביחד
נתון באופן כמותי ע"י השערוך.
ברור שלכל אחד יש מוטיבציה להגזים בטובת ההעדפה שלו.
מנוסף, קשה מאוד לעשות Inter-personal comparison – כלומר להשוות את הכימות בין
אנשים.
מה אפשר לנו לעשות את ההשוואה הזו? $$$!
אבל גם זה בעייתי כי יכול להיות שמישהו מעדיף מאוד משהו, אבל אין לו כסף
כדי שמבטא את מידת ההעדפה שלו.
אז נניח שזה לא קורה...

נגדיר את הדברים הבאים: 23.03.2010

$v_i \in \mathbb{R}^A$ פונקציית הערכה Valuation

$v_i(a)$ כמה i אוהב את תוצאה a (נמדד בכסף)

- נרשה למנגנונים לקחת (או לתת) כסף מהשחקנים.

<u>הנחה על השחקנים:</u> אם נבחרה תוצאה a ושחקן i שילם p_i במנגנון, [quasi - linearity] אז התועלת שלו היא $v_i(a)-p_i$.

⊛ <u>הערה:</u> זה quasi - כי אנחנו לא מניחים כלום על המבנה של v_i. אבל יעני מובן שהיחס בין התועלת למחיר ההעדפה הוא אדיטיבי.

מה שהשחקנים רוצים לעשות, זה למקסם את התועלת הזו.

נתחיל מדוגמה של מכרז, ננתח אותה ואז נראה שאפשר להשיג את המטרה הנ"ל די באופן כללי.

נניח $A=\{\text{Alice wins}, \text{Bob wins}, \text{Carol wins}\}$ = a, b, c

$v_i(i \text{ wins})>0$

$v_i(j\neq i \text{ wins})=0$.

<u>נקודה חשובה:</u> אם אליס לא זוכה, זה לא משנה לה אם זה בוב או קרול שמנצחים, היא ניטרלית אדישה. (נכון עבור השאר)

אנחנו רוצים למקסם את הרווחה החברתית, שהיא $\sum_i v_i$.

Alice Bob Carol

ערכים אמיתיים a b c

$a = V_{alice}(\text{alice wins})$

הפתרון המקסם רווחה חברתית הינו $\text{argmax}(a,b,c)$
אנחנו רוצים מנגנון שמוציא את ה-argmax $f(a,b,c)$ ומצמיד להם תשלומים.

איך דואגים שלאנשים לא יהיה כדאי לשקר?

<u>מכרז מחיר שני:</u>

<u>המנצח:</u> $\text{argmax}(a,b,c)$

המנצח משלם את המחיר השני בגובהו, האחרים לא משלמים כלום.

<u>קלט:</u> $[8,3,12]$

<u>פלט:</u> Carol מנצחת ומשלמת 8.

<u>משפט:</u> מכרז מחיר שני הוא כנה.
כלומר, עבור Alice: לכל a',a,b',c' אם הערך של Alice הוא a, התועלת כשהיא אומרת a עדיפה לפחות מאשר התועלת כשהיא אומרת a' [כאשר Bob, Carol אומרים b',c']

אפשרות א' $a>\max(b',c')=m$

- אם היא אומרת a, היא מנצחת, מקבלת ערך a, משלמת m. סך התועלת: $a-m>0$
- אם היא אומרת $a'<m$ היא לא מנצחת, לא משלמת (התועלת=0).
- אם $a'>m$, מנצחת, משלמת את m והתועלת נשארת $a-m$.

- [illegible]

אפשרות ב' $a<\max(b',c')=m$

- אם היא אומרת a, מפסידה, לא משלמת והתועלת היא 0.
- אם $a'<m$ היא מפסידה לא משלמת והתועלת היא 0.
- אם $a'>m$ היא מנצחת, משלמת m והתועלת היא $a-m<0$!

נניח שאליס יכולה לתחמן את Bob ו- Carol שיגלו את הערכים שלהם קודם. אז לאליס יש שתי אפשרויות:
- לומר ערך גבוה מ- m ולנצח
- לומר ערך נמוך מ- m ולהפסיד.

התשלום, במידה ואליס מנצחת, הוא m בכל מקרה.
הערך של אליס a, אומר "אני מוכנה לשלם עד a כדי לנצח".
מה שהופך את המנגנון לכנה זה שהנקודה הקריטית שמעליה היא זוכה, היא בדיוק גם התשלום שלה.
בקיצור, לא משנה לאחור, אחרי ש- B ו- C מגלים את ערכיהם, ל- Alice לא כדאי לשקר.

בואו נגדיר קצת סמנטיקה:
⊛ ערך, value, זה $v_i(a)$
⊛ תועלת, utility $u_i=v_i(a)-p_i$

באופן כללי התשלומים מהמקרה של שוויון, צריך להגדיר שבירת שוויון. נראה שזה לא משנה איך נשבור שוויון, זה עדיין כנה.
- אפשר לשבור שוויון לכיוון לקסיקוגרפי.

הסבר: לכל שחקן, הוא אדיש לחלוטין אם הוא מקבל את הפרס ומשלם את ערכו, או לא מקבל את הפרס - בכל מקרה התועלת שלו היא 0.

הערה: זה לא חסין להתאחדויות. הראשון והשני יכולים להתאחד כדי לשפר את התועלת של הראשון.
⊡ התאחדות שלא מכילה את הראשון - לא תעזור לאף אחד.
⊡ התאחדות שלא מכילה את השני - לא משנה כלום.

מנגנון כללי שממקסם תוחלת חברתית [משפחת מנגנוני VCG Vickerey, Clarke, Groves]
קלט: פונקציות $v_1 \cdots v_n \in \mathbb{R}^A$
פלט: $a^*=\arg\max_{a\in A}\sum_i v_i(a)$

תשלומים: שחקן i משלם $h_i(v_{-i}) - \sum_{j\neq i} v_j(a^*)$

כאשר הפונקציה h_i הינה פונקציה כלשהי שאינה תלויה ב- v_i
$h_i:(\mathbb{R}^A)^{n-1} \to \mathbb{R}$

משפט: כל מנגנון VCG הוא כנה.
הוכחה:
← קודם נראה למקרה הפרטי ש- $h_i\equiv 0$.
התועלת של שחקן i בבחירת a^* היא $v_i(a^*)+\underbrace{\sum_{j\neq i} v_j(a^*)}_{\text{התשלום ☺}} = \sum_i v_i(a^*)$

נשים לב שצורת התשלום הזו מזהה את הטעם של השחקן עם הטעם של החברה.
למה זה עוזר אותנו?
- אם i יגיד אמת, יבחר a^* שממקסם את $\sum v_i(a^*)$ = תועלת של i.
- אם יגיד משהו אחר, יתקן ויבחר a' ואז התועלת של i תהיה:
$$v_i(a')+\sum_{j\neq i} v_j(a') \le \sum_i v_i(a^*)$$
וזה פחות טוב כי a^* הוא המקסימום!

← מקרה כללי $h_i(v_{-i})$ פשוט מתווסף לשני המצבים שהשוואנו ולכן אינו משנה את ההעדפה ביניהם.

שאלה מהירה: למה מכרז הוא מקרה פרטי של הנ"ל?
נדחה לשיעור הבא את ההסבר.
לא אנחנו הולכים בדרך לבחור את ה- h_i בצורה מאוד הגיונית. קוראים לזה תשלומי pivot של Clarke.
חג שמח!