02.03.2010

-1-

משפט Arrow

כל פונ' רווחה חברתית F מעל קב' A של אלטרנטיבות, $|A|\geq 3$,
שמקיימת פה-אחד ו- IIA היא דיקטטורה.

הוכחה:

טענה 1: נטרליות בצורת אם $\forall i\ a<_i b \Leftrightarrow c<'_i d$ אז $a>b \Leftrightarrow c>'d$

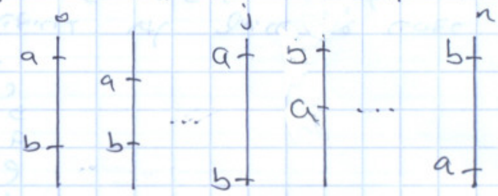
נניח ש- $a>b$. נתבונן בסדר $<_i$. אנחנו לא יודעים איפה c ו-d נמצאים,
אבל אנחנו מעבירים את c להיות מעל a ואת b להיות מיד מתחת ל- d.

$\Rightarrow$ היחס בין c ל- d הוא בדיוק כמו היחס בין a ל-b.

אזי עבור הפרופיל החדש שהגדרנו, אנחנו יודעים ש- $F(c,a)= c>a$
$F(b,d)=b>d$

ואם נתון ש- $a>b$ אזי מטרנזיטיביות $c>d$.
ומ- IIA $c>'d$.

נניח $a,b\in A$ $a\neq b$. לכל $0\leq j\leq n$ נגדיר פרופיל π^j.



$\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^n$

$b>_F a$ $\qquad$ $a>_F b$

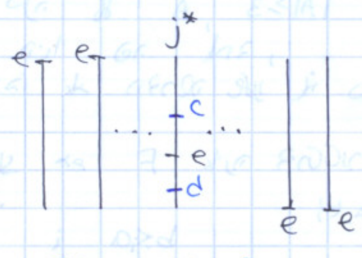
הפרופיל כיון נקח לפי האינדקס שלו. כלומר, ב- π^j
עד האינדקס j $a>b$ והחל מ- j+1 $b>a$.
לכל אחד מה- π^j-ים.

אזי קיים j^* כך ש:
עבור $F(\pi^{j^*-1})$ $b>_F a$
עבור $F(\pi^{j^*})$ $a>_F b$

טענה: j^* הוא הדיקטטור. כלומר, $c,d\in A$ $c>_{j^*}d$ אזי $c>_F d$

[מכאן נובע גם שיש נקודת תיווך אחת מ- $a>b$ ל- $a<b$

תהי אלטרנטיבה $e\neq c,d$
לכל הבוחרים $i<j^*$ נשים
את e במקום ה- I.
לכל הבוחרים $j^*<i$ - נשים את
e במקום האחרון.
עבור j^*, $c>e>d$.



היות שלא נגענו בסדר בין c ל- d, מ-IIA - מה שנכון לפרופיל הזה נכון גם
למקורי.

02.03.2010 אנחנו יודעים שב- π^{j^*-1} $b >_{F(\pi^{j^*-1})} a$

-2-

נשים לב שהיחס בין e ל- c בפרופיל החדש שהגדרנו הוא בדיוק כמו היחס בין a ל- b ב- π^{j^*-1} ... ולכן נקבל מניטרליות בצורות: $c >_F e$
לגמרי באות ב- π^{j^*} היחס בין e ל- d הוא בדיוק כמו היחס בין a ל- b ושם $a >_{F(\pi^{j^*})} b$ ומניטרליות בצורות $d >_F e$.

ולכן מטרנזיטיביות $c >_F d$. ∎

הגדרות

* פונקציית בחירה חברתית f ניתנת למניפולציה אסטרטגית ע"י מצביע i אם קיימים $<_1,\dots,<_n$ וקיים $<_i'$ כך ש: $f(<_1,\dots,<_n)=a$

$$a' = f(<_1,\dots,<_{i-1},<_i',<_{i+1},\dots,<_n) \quad \text{-ו} \quad a <_i a'$$

אז $a <_i a'$ אז השחקן i יכול להשפיע על התוצאות לטובתו ע"י שינוי סדר הדירוג שלו $\Leftarrow$ f ניתנת למניפולציה אסטרטגית.

* פונקציה רווחה חברתית f היא "כנה" (truthfull, incentive compatible) אם (ורק אם) אינה ניתנת למניפולציה אסטרטגית.

* פונקציית בחירה חברתית f היא מונוטונית אם $f(<_1,\dots,<_n)=a \neq a'=f(<_1,\dots,<_i',\dots,<_n)$ אז: $a' <_i a$ וגם $a <_i' a'$

טענה: פרח"ח היא כנה אמ"מ היא מונוטונית.

משפט: Gibbard-Satterthwaite
תהי f - פרח"ח כנה על A, $|A|\geq 3$, אזי f היא דיקטטורה.

נבנה פרח"ח F המבוססת על f באופן הבא: על מנת לקבוע את הסדר בין a ו- b ב- F נזיז את a ו- b לראש העדפות כל השחקנים תוך שמירה על היחס ביניהם, ונבדוק את בחירת f.
נוטציה: $S\subseteq A$ ו- $<\in L$. נסמן ב- $<_S$ את היחס המתקבל מהזזת כל האלטרנטיבות ב- S לראש הדירוג תוך שמירה על הסדר הפנימי ביניהם.
$S=\{a,b,c\}$

$<$		$<_S$
e		c
c		b
b	$\Rightarrow$	a
a		e
d		d

טענה: לכל $<_1,\dots,<_n$ ולכל S מתקיים $f(<_1^S,\dots,<_n^S)\in S$
תהי $a\in S$. f על $\Leftarrow$ קיים $<_1',\dots,<_n'$ כך ש $f(<_1',\dots,<_n')=a$
באופן סדרתי, לכל i נחליף את $<_i'$ ב- $<_i^S$
בכל שלב, ממונוטוניות, לא יכולה להיבחר אלטרנטיבה $b\notin S$.
ולכן ת"ז (?) יתקיים $f(<_1^S,\dots,<_n^S)\in S$ ∎

* כאמור, אם בוחר לא משנה את הבחירה כך ש- $b\notin S$ מדורג מעל $a\in S$, $\forall a\in S$.
F מרחיבה את f באופן ש: $a <_F b$ אמ"מ $f(<_1^{\{a,b\}},\dots,<_n^{\{a,b\}})=b$
$\Leftarrow$ להשלמת, אפשר להוכיח בבית ש- F כנה היא אנטי-סימטרית וטרנזיטיבית.

טענה: אם f היא כנה על A, $|A|\geq 3$ שאינה דיקטטורה, אזי F שמרחיבה אותה היא פה אחד, IIA, ואינה דיקטטורה.
[ואם נוכיח את זה, נקבל את הדרישה שלנו כי סתירה עם משפט Arrow...]
הוכחה:
אם f אינה דיקטטורה אז גם F אינה דיקטטורה. נותר להוכיח ש- f כנה על A
$\Leftarrow$ F IIA ופה אחד.
פה אחד ("Pareto") לכל i $b <_i a$
$\left(<_i^{\{a,b\}}\right)^{\{a\}} = <_i^{\{a,b\}}$
$\leftarrow$ כי ממילא לכל i, $b <_i a$
אז $f(<_1^{\{a,b\}},\dots,<_n^{\{a,b\}})=a$ ולכן $b <_F a$.

9.03.2010

-3-

נותר להראות IIA.

נניח שלכל i: $b <'_i a \iff b <_i a$

צ"ל: $b <'_F a \iff b <_F a$

נניח $b <_F a$, אזי $f(<_1^{\{a,b\}}, \dots, <_n^{\{a,b\}}) = a$

נחליף בדרך את $<_i^{\{a,b\}}$ ב- $<'^{\{a,b\}}_i$.

ממונוטוניות, בכל שלב כזה התוצאה נותרה זהה ולכן בסופו של דבר התוצאה לא יכולה להשתנות: $f(<'^{\{a,b\}}_1, \dots, <'^{\{a,b\}}_n) = a \Rightarrow b <'_F a$, כנדרש. ∎

מה הראינו בעצם?

- אם אנחנו רוצים מערכת שאי אפשר "לתמרן" אותה, אין לנו ברירה אלא להשתמש בדיקטטורה. אבל דיקטטורה זו שיטה די גרועה לנהל מערכת.

אבל בכל זאת דברים עובדים. ומה זה? כי בדרך כלל אנשים לא באמת "מתמרנים" את המנגנון.

אז איך יוצאים מזה?

✓ ⊛ הגבלת תחום ההעדפות

✗ ⊛ במקום לדרוש כנות, פשוט ניקח בחשבון התנהגות אסטרטגית.

← זה לא יעיל, כי מה שמשנה שאנחנו יכולים לתת התנהגות רציונלית בלי אינפורמציה שתגיע מהם. או, שזה פשוט שנקל לתמרן אותה. (כלומר, אם זה אפשרי והשחקנים יודעים שזה מה שעושים...)

✗ ⊛ להסתמך על "יכולת חישובית"

קיימת מניפולציה, אבל אנשים לא יכולים למצוא/לחשב איך לבצע את המניפולציה.

✗ ⊛ כנות כמעט בכל מקרה

⊛ כמעט כנות - אפשר להרוויח משקר, אבל מעט

אז בעצם בשיעור הבא נסתכל על A כמה נושאים קשורים לטפל בבעיה.